

Аналіз кодових конструкцій багатовимірних сигналів для безперервного каналу передачі інформації

Л. Н. Беркман, О. Л. Туровський, О. Г. Варфоломієва, Л. А. Кирпач,
В. В. Дмитренко, О.І. Покотило

Одним з напрямків підвищення ефективності роботи сучасних телекомунікаційних систем є перехід до використання багатовимірних сигналів для безперервних каналів передачі інформації. В результаті проведених в останні роки досліджень встановлено, що забезпечити високу якість передачі інформації в безперервних каналах можна методом об'єднання операцій демодуляції і декодування в єдину процедуру, яка передбачає створення кодової конструкції багатовимірного сигналу.

Безпосередньо розглянуті питання оцінки можливості зміною сигнальної відстані кодової конструкції, підвищити ефективність роботи безперервного каналу передачі інформації.

Встановлено, що кодові конструкції типу: ієрархічна кодова конструкція сигналів; ієрархічна кодова конструкція сигналів з евклідовою метрикою; перестановочна кодова конструкція сигналів; перестановочна кодова конструкція сигналів з евклідовою метрикою, при їх застосуванні мають потенційну можливість до підвищення швидкості передачі інформації через безперервний канал. Вона, при зменшенні сигнальної відстані від 10 і більше відсотків, може досягати до двох і більше разів.

Здійснено оцінку впливу зменшення сигнальної відстані на ефективність роботи окремих типів кодових конструкцій. Встановлено, що ієрархічна переставна кодова конструкція в порівнянні з ієрархічною кодовою конструкцією, забезпечує вигаи до двох і більше разів в швидкості передачі інформації при зменшенні сигнальної відстані в два рази. Реалізація процедури модуляції не має принципових труднощів при умові, що для кожного коду кодової конструкції відома процедура кодування при застосування двійкових кодів. Отримані результати дозволяють побудувати достатньо прийнятну по складності процедуру демодуляції відповідно визначених типів кодових конструкцій.

Ключові слова: безперервний канал передачі, багатовимірний сигнал, кодова конструкція сигналу, сигнальна відстань.

1. Вступ

Одним з напрямків підвищення ефективності роботи сучасних телекомунікаційних систем є удосконалення існуючих та розробка нових методів модуляції та завадостійкого кодування для безперервних каналів передачі сигналів. Перехід в телекомунікаційних системах до ансамблів багатовимірних сигналів збільшує швидкість передачі інформації та забезпечує передачу великих пото-

ків інформації. При цьому питання забезпечення високої ймовірності передачі інформації вирішуються застосуванням потужного завадостійкого кодування.

Теорія передачі сигналів та теорія завадостійкого кодування довгий час розвивались незалежно. Збільшення вимог до швидкості та об'єму передачі інформації вимагало пошуку нових перспективних теоретичних засад підвищення ефективності модуляції та декодування в безперервних каналах прийому сигналів. Одним з таких напрямків є дослідження, спрямовані на оцінку ефективності застосування кодових конструкцій багатовимірних сигналів в поєднанні з завадостійкими кодами. При цьому процедури модуляції/кодування та демодуляції/декодування в таких кодових конструкціях здійснюються сумісно та одночасно. Очевидно, що при раціональній побудові такі кодові конструкції повинні поєднувати позитивні якості як ансамблів багатовимірних сигналів так і завадостійких кодів, передбачають прості алгоритми реалізації в безперервних каналах прийому сигналів. Що може забезпечити суттєвий рух в напрямку підвищення ефективності телекомунікаційних систем.

Використання багатовимірних (з великою базою, складових, складних) сигналів дозволяє істотно підвищити якість передачі повідомлень по каналах зв'язу [1, 2]. Основними характеристиками системи сигналів, тобто безлічі сигналів і його взаємно-однозначного відображення на словник джерела повідомлень, є розмірність сигналу, займана смуга частот, потужність множини сигналів і відстань між найближчими сигналами. Для багатьох важливих типів каналів граничні характеристики, наприклад потужність при заданих розмірності і мінімальній відстані, вивчені досить добре.

Однак конструктивна теорія сигналів розвинена в основному для дискретного, перш за все двійкового каналу, тобто в рамках теорії кодування. У теорії кодування дискретний канал, утворений модулятором елементарних сигналів, безперервним каналом і демодулятором елементарних сигналів, вважається заданим. При цьому не вдається наблизитися до потенційних характеристик безперервного каналу як внаслідок звуження класу сигналів, так і з огляду на недостатнє використання під час декодування відомостей про викривлення сигналу в безперервному каналі. Останній недолік долається при об'єднанні демодуляції і декодування в єдину процедуру прийому в цілому, так званого м'яким (або аналоговим) декодуванням (або рішенням) і прийомом в напівбезперервному каналі [3, 4]. Для подолання першого недоліку модуляція, тобто перетворення слова повідомлення в сигнал на вході безперервного каналу, повинна розглядатися як єдина процедура, яка об'єднує кодування і модуляцію елементарних сигналів. Число відомих конструкцій сигналів, що відображають такий підхід, невелика.

Основні підходи до базової розбудови різних кодових конструкцій, принципи їх кодування і декодування викладено в [5, 6]. Основи просторової модуляції кодових конструкцій для гаусівських каналів та їх класифікація розглядаються в [7, 8]. Визначення нижніх меж для кодів перестановок при використанні їх в багатовимірних сигналах для передачі безперервних каналах з затуханнями подано в [9, 10]. Певні перспективні напрямки побудови нових типів кодових конструкцій, в тому числі для гаусівських сигналів, описано в [11–13].

Дискретний код також пов'язаний з типом та принципами побудови кодових конструкцій, які використані в тому чи іншому багатовимірному сигналу.

Одним з напрямків забезпечення високої якості передачі багатовимірних сигналів в безперервних каналах є об'єднання операцій демодуляції і декодування в єдину процедуру, яка передбачає створення кодової конструкції багатовимірному сигналу. Питання оцінки можливості впливу параметрів кодових конструкцій багатовимірних сигналів на ефективності застосування безперервного каналу передачі інформації є актуальним науковим завданням. І в даний час недостатньо досліджене

Важливим науковим завданням є визначення типу кодової конструкції багатовимірних сигналів, ефективність яких пов'язана з сигнальною відстанню. Це в подальшому дозволить здійснити аналіз їх можливостей щодо більш точного обліку розподілу сигнальної відстані на множину елементарних сигналів з заданою потужністю. Що, в кінцевому, дозволить здійснити оцінку впливу змін сигнальної відстані на ефективність безперервного каналу передачі інформації.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Проблемам визначення типу конструкції багатовимірному сигналу та оцінці його можливостей щодо більш точного обліку розподілу відстані на множину елементарних сигналів з заданою потужністю присвячено ряд робіт.

В роботі [14] наведено результати досліджень щодо аналізу та синтезу кодових конструкцій, що призначені для використання в сучасних та перспективних телекомунікаційних системах. Подано типи та особливості застосування різних типів кодових конструкцій. Але безпосередньо оцінка ефективності їх функціонування в напрямку впливу сигнальної відстані на ефективність функціонування безперервного каналу в роботі не наведена.

Робота [15] присвячена дослідженням теорії сигнально – кодових конструкцій та кодового кодування. В поданій роботі достатньо добре в розглянуті питання застосування різних типів кодових конструкцій та визначені напрямки їх удосконалення. Безпосередньо питання оцінки ефективності різних кодових конструкцій в напрямку зменшення сигнальної відстані в даній роботі відсутні.

В роботі [16] розглянуті питання моделювання безперервних каналів зв'язку при можливості використання в них різних кодових конструкцій, але питання безпосереднього зв'язку ефективності каналу та кодової конструкції в роботі не розглянуто. Відповідно відсутні питання оцінки ефективності застосування безпосередньо кодових конструкцій.

Робота [17] досліджує розвиток багатовимірних сигналів для обробки за допомогою запропонованої ієрархічного алгоритму кодування на основі нероздільної системи. Безпосередньо розглянуто один з типів кодової конструкції сигналу але без аналізу його ефективності та впливу на неї сигнальної відстані в роботі відсутні.

В роботі [18] на фоні досліджень методу адаптивного декодування авто ортогональних кодів розглянуто певні питання оцінки ефективності їх застосування в телекомунікаційних мережах. Але безпосередньо питання аналізу всьо-

го комплексу кодових конструкцій та оцінку впливу на їх ефективність сигнальної відстані в роботі не розглянуто.

Питання підвищення ефективності багатовимірних сигналів розглянуто в роботі [19]. При дослідженні ефективності їх застосування автором проаналізовано можливості використання різних типів кодових конструкцій таких сигналів. Але оцінка впливу на ефективність багатовимірного сигналу сигнальної відстані його кодової конструкції в роботі відсутня.

У роботі [20] досліджені деякі нестандартні набори кодових конструкцій для OFDM сигналів, що вирішують питання врахування різноманіття різних сигналів OFDM та коливання їх амплітуд, які впливають на їх підсилення. Аналіз функціонування та оцінка ефективності запропонованих в роботі кодових конструкцій з точки зору зміни сигнальної відстані в роботі відсутні.

Робота [21] присвячена дослідженням одного з типів перспективних кодових конструкцій багатовимірного сигналу. А саме, в роботі розглянута кодова конструкція типу «дизайн сузір'я». Приведені данні досліджень ефективності роботи розглянутої кодової конструкції при запроектованій сигнальній відстані. Але розгляд інших типів кодових конструкцій та вплив їх функціонування на ефективність безперервного каналу передачі інформації в роботі відсутні.

В роботі [22] досліджено питання побудови системи розрідженого коду з множинним доступом (SCM). Основою запропонованої в роботі системи є перспективна кодова конструкція сигналу на основі оптимізованих унітарних обертань на гіперкубах. Питання управління сигнальною відстанню при оцінці застосування такої конструкції в роботі не розглянуті. Також відсутній порівняльний аналіз існуючих кодових конструкцій та запропонованої системи розрідженого коду відносно вирішення поставленого в статті наукового завдання.

Таким чином, науковим завданням, вирішенню якого присвячена дана стаття, є визначення та аналіз типів кодових конструкцій багатовимірних сигналів для безперервних каналів передачі інформації. Визначені конструкції, при забезпеченні властивостей щодо простоти та універсальності, повинні забезпечити більшу швидкість передачі інформації в безперервному каналі за рахунок більш точного обліку розподілу сигнальної відстані.

3. Мета та задачі дослідження

Метою роботи є оцінка впливу сигнальної відстані кодової конструкцій багатовимірного сигналу на швидкість передачі інформації в безперервному каналі для різних типів кодових конструкцій багатовимірного сигналу.

Для досягнення вказаної мети необхідно:

- проаналізувати існуючі типи кодових конструкцій багатовимірних сигналів в напрямку оцінки можливостей зміни їх сигнальної відстані на ефективність роботи;
- методами математичного моделювання здійснити оцінку впливу зміни сигнальної відстані на швидкість передачі інформації в безперервному каналі по окремим типам кодових конструкцій багатовимірних сигналів;
- здійснити порівняльний аналіз та оцінку ефективності зменшення сигнальної відстані на швидкість передачі інформації в безперервному каналі пере-

дачі інформації по визначеному спектру розглянутих в статті кодових конструкцій багатовимірних сигналів.

4. Матеріали та методи дослідження

Розглядається структурна схема одноканальної системи передачі інформації, в якій синтезується кодова конструкція багатовимірний сигналу для безперервного каналу передачі інформації.

Структурна схема вказаної системи подана на рис. 1 [14].

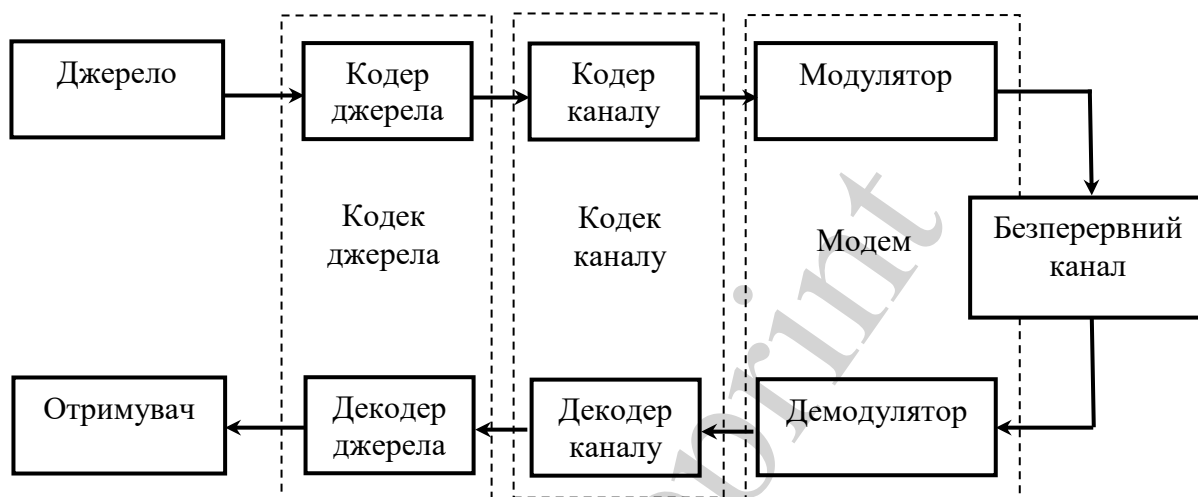


Рис. 1. Структурна схема одно канальної системи передачі інформації в безперервному каналі

Для проведення досліджень кодових конструкцій багатовимірних сигналів для безперервного каналу передачі інформації будуть використані методи теорії завадостійкого кодування з виправленням помилок, теорії надмірності радіосигналів. Використані також операторні методи перетворення радіо простору, статистична теорія зв'язку, методи визначення вільної відстані інваріантних сигнально-кодових конструкцій.

5. Результати дослідження впливу сигнальної відстані кодових конструкцій на функціонування безперервного каналу передачі інформації

5.1. Аналіз кодових конструкцій в напрямку оцінки можливостей впливу зміни їх сигнальної відстані на ефективність роботи

Позначимо для багатовимірного сигналу M -ічний код довжини N з словами і мінімальною відстанню Хеммінга d через $(N, M, d)_M$ або, при $M=M^K$, через $[N, K, d]M=(N, M^K, d)_M$. Оператор f модуляції елементарних сигналів співпоставляється символу $q_n \in \{0, \dots, M-1\}$ слова $q=(q_1, \dots, q_N) \in (N, M, d)_M$ елементарний сигнал $x_n=f(q_n)$ з безлічі елементарних сигналів X потужності $|X|=M$, що міститься в повній безлічі можливих на вході безперервного каналу елементарних сигналів. А оператор кодування ϕ слову u словника джерела U слово q коду. Пара відображень f і ϕ задає відображення словника на безліч сигналів визначаючи конс-

струкцію системи сигналів, звану далі кодовою. Тут конструктивне безліч сигналів, представлене у вигляді Декартового ступеню.

Нехай для кожної пари сигналів визначена міра розрізнення $D(x', x'')$, звана далі сигнальною відстанню або просто відстанню, якщо виключені непорозуміння. Сигнальна відстань не обов'язково метрика, але в деяких які представляють інтерес випадках, є монотонною функцією метрики. Для багатьох (але не всіх) типів каналів сигнальна відстань аддитивна, тобто представимо у вигляді [1]:

$$D(x', x'') = \sum_{n=1}^N D_0(x'_n, x''_n). \quad (1)$$

Прикладом може служити квадрат Евклідової відстані (не метрика) або відстані Хеммінга і Лі (метрики). При використанні кодової конструкції зв'язок між мінімальними сигнальною відстанню на безлічі сигналів і відстанню Хеммінга d дається в умовах (1) очевидним співвідношення [1]:

$$D = \min_{x', x'' \in A, x' \neq x''} D(x', x'') \geq \delta d. \quad (2)$$

У більшості відомих кодових конструкцій X – одновимірне дійсне (якщо канал низькочастотний) або одновимірне комплексне, тобто двовимірне дійсне множина (при амплітудній і фазовій модуляції елементарних сигналів в смугових каналах). Принципово кодова конструкція придатна при будь-якій розмірності у безлічі елементарних сигналів X . Але вдала вона, тільки якщо всі ненульові відстані в X однакові, наприклад коли X – правильний симплекс (зокрема, складається з двох сигналів) або набір ортогональних сигналів з однаковими нормами. Тоді сигнальна відстань між двома сигналами з A пропорційна відстані Хеммінга між словами коду – образами цих сигналів, і при хорошому коді кодова конструкція хороша. Однак при великій потужності M безлічі X , збільшення якої необхідно для отримання високої швидкості, відстані на X істотно різні. Кодова конструкція, «яка підміняє» всі ненульові відстані $D_0(x'_n, x''_n)$ найменшим з них, що можна трактувати як двійкове квантування відстаней, не враховує цих відмінностей. В той же час вона володіє двома важливими достоїнствами – порівняльною простотою і універсальністю. Під універсальністю приймається принципова можливість отримання систем сигналів довільної розмірності і з довільними сигнальними відстанями. Простота забезпечується регулярністю (наприклад, алгебраїчними властивостями) кодів, які об'єднують однотипні елементарні сигнали в багатовимірні. Певного типу кодові конструкції зберігають в тій чи іншій мірі ці достоїнства, але дозволяють отримати більш потужні системи сигналів за рахунок більш тонкого обліку розподілу відстаней на X .

Кодові конструкції, засновані на розбитті безлічі елементарних сигналів на непересічні підмножини, в кожному з яких при вдалому розбитті сигнальна відстань між найближчими сигналами більша, ніж у всіх X . Найбільш зручна ієра-

рхічна конструкція (ІК), в якій ідеї узагальненого каскадного коду [23–25] пристосовані для системи сигналів з довільною адитивною сигнальною відстанню [26, 27]. Під ієрархією розуміється сукупність L розбиття множин X на класи таких, що всі класи одного рівня (одного розбиття) рівно потужні і можуть включати класи попереднього рівня тільки цілком. Тобто класи попереднього рівня «вкладені» в класи наступного рівня подібно системі внутрішніх вкладених кодів узагальненого каскадного коду. Безліч класів $(l-1)$ -го рівня, включених в клас 1-го рівня, відображається взаємно-однозначно на безліч символів M_l -ічного коду $(N, M_l, d_l)_{M_l}$ l -го рівня. Що уявляє собою аналог зовнішнього коду узагальненого каскадного коду де $M_1 M_2 \dots M_L = M$. Так як сигнальні відстані між елементарними сигналами класу l -го рівня зростають зі зменшенням l , перехід від кодової конструкції з одним M -ічним кодом до багатокодової ІК дозволяє збільшити потужність безлічі сигналів без зниження мінімальної сигнальної відстані. Це подібно тому, коли перехід від каскадного до узагальненого каскадного коду дозволяє збільшити потужність коду без зниження мінімальної Хеммінгової відстані [24, 25].

Сукупність L – згортальних кодів дозволяє на базі тієї ж ієрархії отримати згортальний аналог ІК сигналів для безперервного або дискретного каналів з адитивною сигнальною відстанню.

В першу чергу, з точки зору оцінки впливу сигнальної відстані на ефективність роботи кодової конструкції, цікавлять саме ті конструкції, в яких кодування символів на всіх рівнях ієрархії здійснюється через сигнальну відстань [1, 3, 14].

Для подальшого аналізу та оцінки ефективності розглянемо наступні типи кодових конструкцій багатовимірних сигналів [1, 2, 3, 14]:

- ієрархічну кодову конструкцію сигналів(ІК);
- ієрархічну кодову конструкцію сигналів з евклідовою метрикою;
- перестановочну кодову конструкції сигналів;
- перестановочну кодову конструкції сигналів з евклідовою метрикою.

5. 1. 1. Ієрархічна кодова конструкція багатовимірних сигналів

Нехай на безлічі елементарних сигналів X потужності $M = M_1 M_2 \dots M_L$ визначена ієрархія – сукупність L розбиття на непересічні класи. Кожен клас l -го рівня ієрархії (l -го розбиття) включає M_l класів $(l-1)$ рівня, тобто складається з $\mu_l = M_1 M_2 \dots M_l$ сигналів. Нумерація класів $(l-1)$ -го рівня, що входять в клас l -го рівня, задає взаємно-однозначне відображення безлічі класів $(l-1)$ -го рівня на безліч цифр $\{0, \dots, M_l - 1\}$. Тому набір (q_{1n}, \dots, q_{ln}) , де визначає єдине значення n -го елементарного сигналу, де f – правило (оператор) модуляції елементарних сигналів. Порівняємо l -й рівень та мінімальну l -у сигнальну відстань в класі [1, 2]

$$\delta_l = \min_{q_{l+1,n}, \dots, q_{Ln} (q'_{1n}, \dots, q'_{ln}) \neq (q''_{1n}, \dots, q''_{ln})} D_0(x'_n, x''_n), \quad (3)$$

де $x'_n = f(q'_{1n}, q'_{ln}, q_{l+1,n}, \dots, q_{Ln})$, $x''_n = f(q''_{1n}, q''_{ln}, q_{l+1,n}, \dots, q_{Ln})$.

Клас L -го рівня збігається з X , тому $\delta_L = \delta$. У ієрархію можна включити також нульовий рівень з M класами по одному сигналу в кожному і з $\delta_0 = \infty$. Оскільки клас наступного рівня може включати клас попереднього рівня тільки цілком, то можна об'єднати два рівні, опустивши $(l-1)$ -е розбиття, так що можна враховувати, що $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_L = \delta$.

Нехай $q_1 = (q_{i1}, \dots, q_{iN})$ – слово коду $(N, M_l, d_l)_{M_l}$ l -го рівня, словник джерела представляється Декартовим добутком підсловника взаємно-однозначного відображення на код l -го рівня. Під ієрархічною конструкцією будемо розуміти сукупність ієрархії на безлічі елементарних сигналів X , відображення f безлічі наборів (q_{i1}, \dots, q_{iN}) на безліч X , L кодів рівнів і L відображень ϕ_l . Схема відповідній послідовності перетворень (модуляції) має вигляд:

$$u \rightarrow (u_1, \dots, u_L) \xrightarrow{\phi_l} q_l = (q_{l1}, \dots, q_{lN}) \xrightarrow{f} x_n.$$

Тут ліва стрілка означає розбиття слова на підслова (слово u може являти собою блок в послідовності символів джерела інформації; якщо потужність безлічі блоків менше то деякі слова словника і сигнали не використовуються). Потім кожне підслово кодується в слово коду $(N_l, d_l)_{M_l}$. Результатом є L кодів слів однакової довжини N . Модулятор елементарних сигналів перетворює набір з n -х символів всіх слів в n -й елементарний сигнал, що надходить на вхід каналу.

Твердження 1. Ієрархічна конструкція задає систему сигналів з потужністю безлічі сигналів і з мінімальною сигнальною відстанню [3, 14]:

$$D > \min_{i \leq l \leq L} (\delta_l d_l). \quad (4)$$

Твердження про число сигналів очевидно. Зрозуміло також, що ІК задає систему сигналів, тобто взаємно-однозначне відображення словника U на безліч сигналів A . Для доказу (4) розглянемо відстань між двома сигналами $x' = (x'_1, \dots, x'_N)$, $x'' = (x''_1, \dots, x''_N)$, де $x'_n = f(q'_{1n}, \dots, q'_{Ln})$, $x''_n = f(q''_{1n}, \dots, q''_{Ln})$. При $x' \neq x''$ знайдуться хоча б одне l і одне n такі, що $q'_{ln} \neq q''_{ln}$ і, тоді, знайдеться $\lambda = \max \{l : q'_{1n} \neq q''_{1n}, 1 < l < L, 1 < n < L\}$. Тоді δ_λ – найменше з ненульових відстаней між елементарними сигналами, що входять в x' та x'' будь-яка з таких відстаней $D_0(x'_n, x''_n) \geq \delta_\lambda \delta(q'_{1n}, q''_{1n})$, де $\delta(q'_{1n}, q''_{1n})$ – символ Кронекера (0 або 1). Звідси:

$$D(x', x'') \geq \delta_\lambda \sum_{n=1}^N \delta(q'_{\lambda n}, q''_{\lambda n}) \geq \delta_\lambda d_\lambda, \quad (5)$$

оскільки сигналам з при відповідають різні слова коду λ -го рівня. Так як таке λ знайдеться для будь-якої пари неоднакових сигналів з, то з (5) слідує (4).

При заданій мінімальній сигнальній відстані D мінімальні Хеммінгові відстані кодів доцільно вибрати рівними [1, 2]:

$$d_l = \left\lceil D/\delta_l \right\rceil, \quad (6)$$

де $\lceil D/\delta_l \rceil$ – найменше ціле число, що не менше D/δ_l .

Оскільки при $l < L$, то необхідну для кодів всіх рівнів, крім останнього, відстань Хеммінга d_l може бути, особливо для перших рівнів, істотно меншим $d = dL$, що і дозволяє збільшити потужність безлічі сигналів при ІК в порівнянні з кодовою конструкцією.

Зауваження 2. 1. Ієрархію задають будь-які L відносин еквівалентності на X , якщо кожне розбиває X на рівнопотужні класи і клас наступного відношення еквівалентності включає або все, або жодного елемента класу попереднього відношення. Так, якщо X взаємно-однозначно відображається на групу G (наприклад, $[8, 11]$) і $G_1 \subset G_2 \dots \subset G_L = G$ – її підгрупи порядків μ_1, \dots, μ_L , де $\mu_L = M_1 \dots M_l$, то суміжний клас групи G по підгрупі G_l відображається на клас l -го рівня ієрархії. До ІК такого типу з Хеммінговою відстанню в якості сигнального відносяться узагальнені каскадні коди. Якщо X задано (як область значень) функцією цілочисельних аргументів, то відношення еквівалентності можна визначити фіксацією деяких аргументів.

Нехай $(\lambda_1, \dots, \lambda_\Lambda)$ – перестановка індексів і $q_{ln} = p_\lambda$. Всякому такому впорядкуванню індексів відповідає Λ -рівнева ієрархія з мінімальними відстанями δ_l , обумовленими (3). Замість перестановки можна скористатися іншою довільною взаємно-однозначною відповідністю наборів $(p_{1n}, \dots, p_{\Lambda n})$ і (q_{1n}, \dots, q_{Ln}) , що задаються L функціями. Загальний метод такого перекодування змінних, який приводить до вдалої ієрархії, нам невідомий. Деякі прийоми перекодування наведені в прикладах 8–10.

Зауваження 2. 2. Системі сигналів, що задана ієрархічною конструкцією, можна співпоставити і інші ІК, так як будь-яка з $L!$ перестановок рівнів визначає будь яку ІК. Нехай при i -й перестановці q_{ln} став символом l -го рівня, на якому з урахуванням відповідних змін в (3) порядку фіксації символів мінімальна відстань дорівнює $\delta_l^{(i)}$. З твердження 1 випливає оцінка знизу $D \geq \min(\delta_l^{(i)} d_i)$. Ця оцінка справедлива при всіх перестановках, тому $D \geq \max x_i \min_l (\delta_l^{(i)} d_i)$.

5. 1. 2. Ієрархічна кодова конструкція багатовимірних сигналів з евклідової метрикою та поворотною модуляцією

Нехай сигнал представляється вектором N_V -мірного речового евклідова простору, складеним з N_V -мірних векторів (елементарних сигналів).

Евклідова відстань не адитивна, але її монотонна функція – квадрат евклідової відстані, який визначений як енергетичною відстанню. Вказана відстань не є відстанню в загальноприйнятому сенсі, так як не задовольняє «аксіомі три-

кутника», але вона адитивна і може служити сигнальною відстанню ІК. З монотонності слідує, що оптимізація сигналів за мінімальними енергетичною і евклідовою відстанями еквівалентні. Розглянемо приклади, враховуючи, що енергетична відстань між двома елементарними сигналами [2, 3]

$$D_0(x'_n, x''_n) = \sum_{i=1}^v (x'_{in} - x''_{in})^2 = (\rho'_n)^2 + (\rho''_n)^2 - 2\rho'_n\rho''_n \cos 2\varphi = (\rho'_n - \rho''_n)^2 + 4\rho'_n\rho''_n \sin^2 \varphi, \quad (7)$$

де $\rho_n = |x_n|$ – норма вектора x_n , φ – половина кута між векторами x'_n та x''_n .

Нехай $v=1$ і одновимірна множина X має вигляд $X = \{x = A + q_n a : 0 \leq q_n \leq M-1\}$, де A і a – константи, а символ представляється позиційним записом у вигляді L -розрядного числа зі змішаною підставою, тобто [2, 3]:

$$q_n = q_{1n}M_2 \dots M_L + \dots + q_{L-1,n}M_L + q_{Ln}. \quad (8)$$

Класом l -го рівня ієрархії є підмножина з X , відповідна фіксованим, внаслідок (3), (7), що разом з (6) визначає необхідну для коду l -го рівня мінімальну Хеммінгову відстань d_l . Відповідна ІК відрізняється від конструкції роботи [12] тільки правилом вибору Хеммінгових відстаней d_l .

Якщо всі значення кожного із символів q_{ln} вважати рівноімовірними, то середня енергія елементарного сигналу мінімальна при $A = -a(M-1)/2$ і дорівнює при цьому [2, 12]:

$$E = a^2(M^2 - 1)/12. \quad (9)$$

Розрахунки показують, що при $N=32$, $r=1$ кодам $(32, 26, 4)_2$ і $(32, 6, 16)_2$ відповідає система сигналів $M=2^{32}$ з мінімальною енергетичною відстанню $D=12,8$ при одиничній середній енергії на координату. Це в 3,2 рази більше, ніж при без надлишкових двійкових сигналах ± 1 . Для того щоб отримати при тих же систему сигналів за допомогою кодової конструкції, потребувався б четвертинний код $(32, 16, 16)_4$, який не існує (він перевершує границю Хеммінга [26]).

Зауважимо, що конструкція цього такої кодової конструкції придатна при 16-ічній амплітудно-фазовій модуляції, якій відповідають двовимірні елементарні сигнали у вигляді пари одновимірних четвертинних [6].

Далі розглядаються сигнали з однаковими енергіями Nv (при одиничній середній енергії на координату), тобто сигнали на сфері, оператор демодуляції яких інваріантний в відомих умовах до масштабу сигналу. Щоб скористатися ІК для побудови таких сигналів, зробимо більш сильне допущення, що енергія кожного v -мірного елементарного сигналу дорівнює

$$x_{1n}^2 + \dots + x_{vn}^2 = v. \quad (10)$$

Іноді (10) відображає також фізичні обмеження на сигнал, наприклад пов'язані з пікфактором.

Задовольняє (10) безліч елементарних сигналів X належить сфері радіусу, тобто являється політопом [28] (під політопом будемо розуміти як фігуру, так і сукупність її вершин, а під його радіусом – радіус сфери). Вершини такого елементарного політопа можуть бути отримані одна з другої поворотом в ν -вимірному просторі, який описується $\nu-1$ кутами, тому відповідну модуляцію елементарних сигналів можна назвати поворотною. Фазова модуляція (ФМ) – окремий випадок поворотної при $\nu=2$. При складовій поворотній модуляції багатовимірний сигнал являє собою набір N елементарних сигналів з поворотною модуляцією кожного з них.

Політоп X допускає відображення на відповідну ортогональну дійсну (або унітарну комплексну) групу ν -мірного простору і ієрархія може бути описана рядом підгруп цієї групи. Однак в цих прикладах можна обійтися більш наочними геометричними уявленнями, не привертаючи поняття груп рухів. Спочатку вибирається який-небудь елементарний сигнал x_n , який приймається в якості (виродженого) елементарного політопа нульового рівня. M_1 його поворотів (без збігів вершин) дають M_1 -вершинний політоп (клас) першого рівня. Об'єднуючи M_2 поворотів політопа, отримуємо політопа – клас другого рівня і так далі. Енергетичною відстанню δ_l є квадрат довжини найменшого ребра політопа. Якщо – кут між вершинами на цьому ребрі, то внаслідок (7), (10) отримаємо [3, 28]:

$$\delta_1 = 4\nu \sin^2 \psi_l. \quad (11)$$

При складовій фазовій модуляції (СФМ) $2N$ -мірний сигнал утворений N сигналами M -ічної ФМ. Якщо $M=M_1 \dots M_L$, то придатна ІК сигналів СФМ (вона майже не відрізняється від конструкції роботи [12], як і в прикладі 1), при якій клас l -го рівня ієрархії виходить M_l поворотами правильного $(M_1 \dots M_{l-1})$ – кутника. Мінімальна енергетична відстань в класі дорівнює 0 [2, 12].

$$\delta_l = 8 \sin^2 \left(\pi / M_1 \dots M_l \right). \quad (12)$$

Сигнал СФМ визначається набором фаз (a_1, \dots, a_N) , де [2, 3]:

$$a_n = \arctg(x_{in} / x_n) = a_{n0} + 2\pi(q_{in} / M_1 + \dots + q_{Ln} / M_1 \dots M_L), \quad (13)$$

$q_{ln} \in \{0, \dots, M_l - 1\}$, a_{n0} – довільна початкова фаза.

Тут суму в дужках або частину її доданків можна уявити також за допомогою китайської теореми про залишки, якщо відповідні M_L взаємно-прості [26]. При $M_l=2$ або 3 Хеммінгова відстань коду l -го рівня строго пропорційна енергетичному. Якщо, крім того, δ_l відносяться як цілі числа, то в (6) можна уникнути втрат на округлення. У цьому сенсі цікаві дворівневі конструкції з $M=4$ і 6.

Сигнал при фазовій модуляції типу ФМ-4 (QPSK – Quadrature Phase Shift Keying) Четвертинний ФМ можна розглядати як пару двійкових одновимірних

сигналів зі значеннями ± 1 . Це дозволяє порівняти ІК ФМ-4 типу СФМ з найкращою ФМ-4 типу СФМ. Нехай $x_{n-1}=(-1)p_{2n-1}$, $x_{2n}=(-1)p_{2n}$, і двійковий набір належить коду $(2N, d)_2$, який визначає систему з сигналів з мінімальною енергетичною відстанню $D=4d_1$. Якщо цей код найкращий, то ніяка четверична СФМ не може дати більшого числа сигналів. З іншого боку [3, 12],

$$a_n = \arctg(x_{1n} / x_{2n}) = -\pi / 4 + (\pi / 2)(p_{2n-1} \otimes p_{2n}) + \pi p_{2n},$$

де \otimes означає додавання по модулю 2.

Порівнюючи цей вираз з (13) при $L=2$, $M_1=M_2=2$ бачимо, що $q_{1n}=p_{2n}$, $q_{2n}=p_{2n} \otimes p_{2n-1}$. Звідки випливає, що, в даному випадку, використання ІК еквівалентно звуженню безлічі всіх двійкових кодів довжини $2N$ до його підмножини. Що вкладається в конструкцію Плоткіна, яка визначається через пряму суму кодів [26].

Відомо, що конструкція Плоткіна призводить до хороших або навіть оптимальних кодів.

Приклад 1. $M=6$, $M_1=3$, $M_2=2$, $\delta_1=6$, $\delta_2=2$. При $D=6d_1$ тут необхідні коди і Якщо $D=6$, то код першого рівня беззбиточний і при $N=2^m-1$ другим може служити код Хеммінга. Тоді щоб отримати $D=12$, потрібні коди $[N, N-1, 2]_3$ першого і другого рівнів, наприклад код БЧХ $[32, 21, 6]_2$, в цьому випадку, тобто більше, ніж при четверичній ФМ при відстані більший, ніж при двійковій ФМ.

Якщо при $M=6$ замість (13) скористатися поданням на основі китайської теореми про залишки. Тобто прийняти $a_n=(2p_1+3p_2)\pi/3$, де p_1 трійчастий, p_2 двійковий символи, ототожнюються з символами кодів двох рівнів, то ієрархії різних конструкцій прикладів можуть розрізнятися тільки перестановкою рівнів.

Ієрархії зазвичай тим краще, чим більше вершин у політопа перших рівнів, якщо, звичайно, довжина найменшого ребра кожного політопа $X^{(l)}$ близька до максимальної при даному числі вершин для всіх l .

При $v=3$ в якості елементарного політопа можна взяти один з численних правильних або напівправильних багатогранників, кожному з яких зазвичай можна зіставити кілька ієрархій. Наприклад, куб $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ можна представити як $M_2=4$ класу першого рівня, кожен з яких містить $M_1=2$ протилежні вершини. Тоді $\delta_1=4$, $v=12$, $\delta_2=4$. Іншу ієрархію дають два повороти тетраедра ($M_1=4$, $M_2=2$, $\delta_1=8$, $\delta_2=4$). Звичайно, куб не дозволить отримати систему сигналів, кращу найкращої четвертої СФМ. Найвдаліше є ієрархії, що складені з вершин ікосаедра, додекаедру та об'єднання цих фігур (орієнтованих так, щоб центри граней однієї і вершини іншої лежали на одних променях з початку координат) і архимедова напів-правильного багатогранника [5, 28].

Ікосаедр, зокрема, можна розглядати як шість поворотів діаметра ($M_1=2$, $M_2=6$, $\delta_1=12$, $\delta_2=3\cos^2(\pi/10)$). А додекаедр – як п'ять поворотів тетраедра ($M_1=4$, $M_2=5$, $\delta_1=8$, $\delta_2=16-\sin^2(\pi/10)$) [19, 20].

Ряд правильних і напівправильних чотиривимірних фігур описуються кінцевими групами кватерніонів [20], що мають власні підгрупи.

5. 1. 3. Перестановочна кодова конструкції багатовимірних сигналів

Нехай множина X елементарних сигналів розбита на R непересічних підмножин $X^{(0)}, \dots, X^{(R-1)}$, P – код довжини N із символами $p_n \in \{0, \dots, R-1\}$. Зіставимо слову $p = (p_1, \dots, p_N) \in P$ конструктивний клас сигналів $X^{(p)} = X^{(p_1)} \times \dots \times X^{(p_N)}$ і припустимо, що в класі $X^{(p)}$ обраний клас сигналів $A^{(p)} \subseteq X^{(p)}$ потужністю $M^{(p)}$ з мінімальною сигнальною відстанню $D^{(p)}$, а мінімальна відстань між конструктивними класами сигналів рівна $D^{(r,p)} = \min D(x^{(r)}, x^{(p)}), x^{(r)} \in X^{(r)}, x^{(p)} \in X^{(p)}$. Повна множина сигналів [3, 4]:

$$A = \bigcup_{p \in P} A^{(p)}. \quad (14)$$

Конструкцію системи сигналів, що обумовлена множиною A та її взаємно однозначним відображенням на словник джерела, назовемо неоднорідною конструкцією (оскільки кожний клас $X^{(p)}$ утримується в Декартовому добутку $X^{(P)}$ неоднакових множин $X^{(P_n)}$). Очевидно

Твердження 2. Неоднорідна конструкція визначає систему сигналів потужності [4]:

$$M = \sum_{p \in P} M^{(p)}. \quad (15)$$

з мінімальною сигнальною відстанню [2, 3]:

$$D \geq \min_{r, p \in P, r \neq p} \{D^{(p)}, D^{(r,p)}\}. \quad (16)$$

Більш зручної може виявитися інша оцінка мінімальної сигнальної відстані, що використовує мінімальну Хеммінгову відстань d_p коду P . Нехай $\delta_x = \min \delta_x(i, j), i \neq j$ – найменша із сигнальних відстаней [2, 3]:

$$\delta_x(i, j) = \min_{x_n^{(i)} \in X^{(i)}, x_n^{(j)} \in X^{(j)}} D_0(x_n^{(i)}, x_n^{(j)}), 0 \leq i, j \leq R-1, \quad (17)$$

між підмножинами множини елементарних сигналів. Тоді із твердження 2 і адитивності сигнальної відстані безпосередньо отримуємо

Наслідок. Мінімальна сигнальна відстань неоднорідної конструкції системи сигналів задовольняє умові [3, 5]

$$D \geq \min_{p \in P} \{D^{(p)}, \delta_x d_p\}. \quad (18)$$

У загальному вигляді неоднорідна конструкція не відрізняється від переборної. Щоб зробити її регулярною, потрібні регулярні методи побудови кодів P і класів сигналів $A^{(p)} \subseteq X^{(p)}$. Ієрархічну конструкцію можна вважати окремим випадком неоднорідної, якщо символ слова $p \in P$ розуміти, наприклад, як набір $p_n = (q_{2n}, \dots, q_{Ln})$, а $X^{(p)}$ – як клас першого рівня ієрархії. Клас $A^{(p)}$ – при цьому отримуємо за допомогою кодової конструкції, а код P – за допомогою $(L-1)$ -рівневої ІК. Більш потужнішими є конструкції, що використовують в якості P переставний (узагальнений рівноважний) код [7], та допускають, на відміну від ІК, розбивку X на нерівні за потужністю класи. *Переставним кодом* $P[W_0, \dots, W_{R-1}]$ називають R -ічний код довжини [3, 5]:

$$N = \sum_{i=0}^{R-1} W_i, \quad (19)$$

кожне слово якого містить W_i символів зі значенням $i \in \{0, \dots, R-1\}$. Двійковий переставний код є рівноважним (іноді рівноважними називають коди з однаковим числом ненульових символів в кожному слові; переставний код є окремим випадком рівноважного в такому розумінні; далі під рівноважним розуміється тільки двійковий код).

Нижче буде необхідним взаємо-однозначне відображення переставного коду $P = P[W_0, \dots, W_{R-1}]$ на множині перестановок індексів $1, \dots, N$. Слово $p = (p_i, \dots, p_N) \in P$ можна зіставити $W_0!, \dots, W_{R-1}!$ перестановок індексів, тому що перестановка на $N_i^{(p)} = \{n : p_n = i\}$ не змінює слова p . Щоб вибрати одну з них, зіставимо природній перестановці $(1, \dots, N)$ яке-небудь *початкове слово*, наприклад $r = (r_i, \dots, r_N) = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1, R-1, \dots, R-1)$ і нехай $p = \pi_p(r) = (r_{i_p}, \dots, r_{N_p})$, де $(1_p, \dots, N_p)$ – перестановка індексів, а дію π_p будемо розуміти як зміну порядку проходження символів коду, елементарних сигналів і т.п. Дія π_p визначена однозначно, якщо поставити за умову, щоб з $n', n'' \in N_i^{(r)}$, $n'_p, n''_p \in N_i^{(p)}$ і $n' < n''$ випливало, що $n'_p < n''_p$.

Приймемо конструктивний клас сигналів $X^{(r)} = X_0$ і клас сигналів $A^{(r)} = A_0 \subseteq X_0$ відповідні до початкового слова r , в якості *початкових класів*. Оскільки конструктивний клас $X^{(p)}$ є перестановкою співмножників Декартового добутку X_0 , тобто $X^{(p)} = \pi_p(X_0)$ природно прийняти, що клас сигналів є $A^{(p)} = \pi_p(A_0) = \{\pi_p(x) : x \in A_0\}$. Тоді в усіх класах сигналів будуть однакові потужності й мінімальні сигнальні відстані. Нехай словник джерела представлений добутком $U = U_A \times U_p$ підсловників U_A потужності $M_A = |A_0|$ й U_p , потужності $M_p = |P|$ та $F_A : U_A \rightarrow A_0$, $F_p : U_p \rightarrow P$, $F_\pi : P \rightarrow \{\pi_p : p \in P\}$ – *взаємо-однозначні відображення*. Неоднорідна конструкція з переставним кодом P , обумовлена

початковим класом сигналів $A_0 \in X_0$ і взаємо-однозначними відображеннями F_A, F_P, F_π називається переставною конструкцією системи сигналів (ПК). При ПК сигнал на вході каналу $x = \pi_p(F_A(u_A))$, де $\pi_p = F_\pi(F_P(u_P))$, $u_P \in U_P$, $u_A \in U_A$, $F_A(u_A) \in A_0$ (добуток $F_\pi F_P$ можна замінити одним перетворенням).

Нехай $D^{(p', p'')}$ – відстань між конструктивними класами (тобто найближчими сигналами класів) $\pi_{p'}(X_0)$, $\pi_{p''}(X_0)$, $p', p'' \in P$, а D_A – мінімальна відстань у класі сигналів A_0 . Тоді із твердження 2 і наслідку до нього маємо

Твердження 3. Переставна конструкція визначає систему сигналів потужності $M = M_A M_P$ з мінімальною сигнальною відстанню співвідношенням, що задовольняють [2, 3]:

$$D \geq \min_{p', p'' \in P, p' \neq p''} \{D_A, D^{(p', p'')}\}, \quad (20)$$

$$D \geq \min \{D_A, \delta_x d_P\}. \quad (21)$$

В силу (21) Хеммінгову відстань між найближчими словами коду P можна прийняти рівною

$$d_P = \lceil D / \delta_x \rceil. \quad (22)$$

Цим співвідношенням слід користуватися, якщо $R=2$ (тобто код P – рівноважний) або якщо всі ненульові сигнальні відстані $\delta_x(i, j)$, обумовлені (17), однакові або близькі між собою. При суттєво різних $\delta_x(i, j)$ ефективніше скористатися переставним кодом у вигляді композиції або добутку композицій більш простих кодів. Переставний код $P = P[W_0, \dots, W_{R-1}]$ довжини N називається композицією переставних $(Q+1)$ -ічного коду $P_1 = P[W_0, \dots, W_{Q-1}, N_t]$, $Q < R-1$, $N_t = W_0 + \dots + W_{R-1}$ довжини N із символами з $\{0, \dots, Q-1, t\}$. В якості перших Q символів цієї множини можна, обрати будь-які, а не лише перші Q елементів з $\{0, \dots, Q+1\}$ і $(R-Q)$ -ічного коду $P_2 = P[W_0, \dots, W_{R-1}]$ довжини N_t із символами з $\{Q, Q+1, \dots, R-1\}$. Якщо кожному слову коду P_1 зіставляється клас потужності $M_{P_1} = |P_2|$ слів коду P_2 , утворений шляхом заміщення символів t у слові $p = (p_i, \dots, p_N) \in P_1$. Наприклад, у порядку збільшення номерів займаних ними місць) символами кожного слова $(t_1, \dots, t_{N_t}) \in P_2$.

Зрозуміло, що потужність композиції двох кодів рівна $M_P = M_{P_1} M_{P_2}$ а мінімальна Хеммінгова відстань [2, 3]:

$$d_P = \min \{d_{P_1}, d_{P_2}\}, \quad (23)$$

де d_{P_1} , d_{P_2} – мінімальні Хеммінгові відстані кодів P_1 і P_2 .

Композицію або добуток композицій можна використовувати в якості побудови (можливо, не дуже близького до оптимального) переставного коду за допомогою рівноважних. Справа в тому, що хоча гарних конструкцій рівноважних кодів відомо небагато, відомих конструкцій недвійкових переставних кодів майже немає. Не менш суттєвим є те, що композиційна конструкція переставного коду P для ПК системи сигналів дозволяє, як сказано вище, врахувати відмінність відстаней $\delta_x(i, j)$ між підмножинами елементарних сигналів. Насправді, нехай $P_p \in P$ – клас слів коду P , якому зіставляється слово $P \in P_1$. Мінімальна Хеммінгова відстань в цьому класі рівна, очевидно, d_{P_2} . Отже, двом словам $p', p'' \in P_p$ відповідають конструктивні класи сигналів, що $X^{(p')}$, $X^{(p'')}$ різняться не менш ніж d_{P_2} підмножинами $X^{(i)}$ елементарних сигналів, звідки випливає, що

$$D^{(p', p'')} \geq d_{P_2}, \delta_x,$$

де $\delta_x = \min \delta_x(i, j)$, $i \neq j$, $i, j \in \{Q, Q+1, \dots, R-1\}$.

Якщо множині $\{Q, Q+1, \dots, R-1\}$ (тобто будь-якій підходящій підмножині з області визначення символів коду P) відповідають досить віддаленні підмножини елементарних сигналів, то

$$d_{P_2} = \lceil D / \delta_x \rceil, \quad (24)$$

може виявитися значно меншим, ніж наступні з (22) або (22) і (23). Зазначимо, що в розглянутому випадку внаслідок (20)

$$D \geq \min \{D_A, d_{P_1} \delta_x, d_{P_2} \delta_x\}. \quad (25)$$

Якщо код P обраний, то необхідно ще вказати конструкцію початкового класу сигналів A_0 . В одному випадку, а саме коли всі ваги коду кратні N_0 , тобто

$$W_i = w_i N_0, \quad N = w N_0, \quad w = w_0 + \dots + w_{R-1}, \quad (26)$$

цей клас можна побудувати за допомогою ІК. Для цього в якості початкового конструктивного класу сигналів приймається Декартова ступінь [3]:

$$X_0 = \tilde{X}^{N_0}, \quad (27)$$

де $\tilde{X} = \left(X^{(0)}\right)^{w_0} \times \dots \times \left(X^{(R-1)}\right)^{w_{R-1}}$ – складена множина елементарних сигналів. Для побудови системи (початкового класу A_0) сигналів в X_0 придатна ІК з N_0 елементарних сигналів $x_n \in \tilde{X}$. Переставну конструкцію системи сигналів з ієрархіч-

ною конструкцією початкового класу сигналів будемо називати *ієрархічною переставною конструкцією* (ІПК). Деякі способи побудови ієрархії на множині \tilde{X} (придатні й в інших випадках) наведені в наступному параграфі.

5. 1. 4. Перестановочна кодова конструкція багатовимірних сигналів з евклідовою метрикою

Для побудови за допомогою ІК сигналів на сфері $S_{N_v}^{N_v-1}$, тобто задовольняючих умові [2, 3, 5]:

$$\sum_{n=1}^N p_n^2 = N_v, \quad p_n = \|x_n\|, \quad (28)$$

в попередньому пункті введена більш сильна умова (10). Конструкції попереднього пункту дозволяють простежити за виконанням (28) у більш загальному випадку.

Нехай $\{X^{(0)}, \dots, X^{(R-1)}\}$ – множина елементарних v -мірних політопів і $p^{(i)} = \|X^{(i)}\|$. Для визначеності будемо вважати, що $p^{(i)} < p^{(i+1)}$ (якщо $p^{(i)} = p^{(i+1)}$ то можна й, як правило, доцільно об'єднати два політопи в один з більшим числом вершин). Внаслідок (7), (17) мінімальна енергетична відстань між політопами [3, 5]:

$$\delta_x(i, j) = \left(p^{(i)} - p^{(j)}\right)^2 + 4p^{(i)}p^{(j)}\sin^2\psi_{ij}, \quad (29)$$

де ψ_{ij} – половина найменшого кута між вершинами політопів. Відображення $X_n = X^{(p_n)}$, $p_n \in \{0, \dots, R-1\}$ визначає політоп, якому належить n -й елементарний сигнал x_n і тим самим зіставляє слову $p = (p_1, \dots, p_N)$ коду політопів P конструктивний клас $X^{(p)}$. Відстань між двома такими класами $X^{(p')}$, $X^{(p'')}$ [3, 5]:

$$D^{(p', p'')} = \sum_{n=1}^N \delta_x(p'_n, p''_n). \quad (30)$$

Підібравши код відображення P якого на множині наборів радіусів (p_1, \dots, p_N) задовольняє (28), і зіставивши кожному слову p коду клас сигналів $A^{(p)}$, отримаємо систему сигналів з рівними енергіями, параметри якої визначаються твердженням 2 і наслідком з нього. Доцільно (коли можливо) в якості сусідніх політопів $X^{(i)}$, $X^{(i+1)}$ вибирати взаємні [28, 29], орієнтуючи їх так, щоб центри поверхневих гнізд одного й вершини іншого лежали на загальних променях з початку координат. Причому, якщо політопи різнотипні, більший радіус повинен бути в політопа з більшим числом вершин.

5. 2. Оцінка впливу зміни сигнальної відстані на ефективність роботи по окремим типам кодових конструкцій багатовимірних сигналів

Методами математичного моделювання здійснити оцінку впливу зміни сигнальної відстані на ефективність роботи безперервного каналу передачі інформації по окремим типам кодових конструкцій багатовимірних сигналів.

Для ієрархічної кодової конструкції проведемо наступні розрахунки.

Приклад 2. Нехай $v=2$, $N=3$, $X^{(0)}$ – точка на початку координат (вироджений політоп), $X^{(1)}$ і $X^{(2)}$ – взаємно повернені шестикутники з радіусами $p^{(1)} = \sqrt{2}$, $p^{(2)} = \sqrt{6}$ й кутами при вершинах [5, 28, 29]:

$$\alpha_n^{(i)} = (i-1)\pi/6 + s_n\pi/3 + t_n2\pi/3,$$

де $i \in \{1, 2\}$, $s_n \in \{0, 1\}$, $t_n \in \{0, 1, 2\}$.

Внаслідок (29) тут $\delta_x(0,1) = \delta_x(1,2) = 2$, $\delta_x(0,2) = 6$. Чотири слова коду політопів P задовольняють (28): $(1,1,1)$ – йому відповідає набір радіусів $(p_1, p_2, p_3) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ і циклічні зрушення слова $(2,0,0)$, тобто набору радіусів $(\sqrt{6}, 0, 0)$. Нехай $D=6$. Енергетична відстань між будь-якою парою із чотирьох конструктивних класів сигналів $X^{(p)}$ не менш $D=6$, що перевіряється за допомогою (29). Між сигналами кожного з останніх трьох класів (з неоднаковими радіусами набору) відстань також не менше $D=6$, тому всі елементи цих класів можна прийняти в якості сигналів. Таких сигналів $3 \cdot 6 = 18$. В першому конструктивному класі $63 = 216$ сигналів. З них за допомогою ІК прикладу 4 можна відібрати $332 = 54$ сигналу з $D=6$. Отриманій множині з $M=72$ сигналів відповідає найбільш відоме 6-мірне пакування рівних сфер, що стосуються рівної їм сфери [30]. Елементи цієї множини можна закодувати четвіркою символів джерела $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, з яких u_1, u_2 – трійкові, u_3 – двійковий, u_4 – четвірковий. Якщо $u_4 \leq 2$, то $p_1 = p_2 = p_3 = p^{(1)} = \sqrt{2}$, тобто передається слово $p = (1,1,1)$ коду політопів, а кути при вершинах політопів (шестикутників) рівні $\alpha_n = \alpha_n^{(1)} = s_n\pi/3 + t_n2\pi/3$, де $t_1 = u_1$, $t_2 = u_2$, $t_3 = u_4$, $s_1 = s_2 = s_3 = u_3$. Якщо $u_4 = 3$, то $p_n = 0$ при $n \neq 1 + u_2$, $p_{1+u_2} = \sqrt{6}$, $\alpha_{1+u_2} = \pi/6 + u_3\pi/3 + u_12\pi/3$. Отриманій множини сигналів можна зіставити ієрархію й далі скористатися ІК. Відповідна конструкція, однак, небагато виграє в порівнянні з конструкцією прикладу 1.

Неоднорідні конструкції, подібні описаним в останніх прикладах, неприпустимі при великій розмірності. Звернемося до ПК, коли в силу (19), (28) [3, 5]:

$$\sum_{i=0}^{R-1} (p^{(i)})^2 W_i = N_v, \quad \sum_{i=0}^{R-1} (p^{(i)})^2 w_i = wv, \quad (31)$$

де остання формула стосується ситуації (26), тобто до ПК.

Для ієрархічної неоднорідної кодової конструкції проведемо наступні розрахунки.

Приклад 3. Нехай $v=1$ і троїчна множина $X = \{0, \pm 1\}$ розбита на $R=2$ підмножини $X^{(0)} = \{0\}$ (точка на початку числової осі, $p^{(0)}=0$) та $X^{(1)} = \{\pm p\}$ (нульмірна сфера радіуса $p^{(1)}=p$), єдина ненульова відстань між якими рівна із врахуванням (31) $\delta_x(0,1) = \delta_x = p^2 = N / W_1$, де W_1 – вага рівноважного коду $P = P[N - W_1, W_1]$ довжини N . Оскільки всі W_1 ненульових компонентів сигналу належать однаковим двійковим множинам $X^{(1)}$, для початкового класу сигналів придатна кодова конструкція з кодом знаків (що визначають знаки ненульових компонентів) (W_1, M_A, d_A) при $\delta = 4p^2$. Із (2) і твердження 3 виходить, що така ПК визначить систему сигналів потужності $M = M_A M_P$ з мінімальною відстанню $D \geq \min\{4d_A p^2, d_P p^2\}$, де M_P й d_P – потужність і відстань Хеммінга коду P , $p^2 = n / W_1$. При $N=2W_1$, $D=4$ кодом може служити вся множина слів довжини N ваги W_1 потужність якого $M_P = C_N^{N/2}$, а двійковим кодом знаків – ненадлишко-вий [5]. Потужність системи сигналів зі $D=4$ складе $M = M_A M_P = 2^{N/2} C_N^{N/2}$.

При розмірності 16 ІК прикладу 1 з кодами $[4,4,1]_2$, $[4,3,2]_4$, $[4,1,4]_3$ дає $2^{18} \cdot 12$ сигналів. Конструкція прикладу 3 з тими ж розмірністю й відстанню дає $(2^4-1) \cdot 2^8 = 2^8 \cdot 15$ сигналів. Різниця, в цьому випадку незначна, тому що розмірності сигналів невеликі і викликана тим, що ПК допускає будь-які слова коду P довжини $4N_0$ ваги $2N_0$ з необхідним Хеммінговою відстанню, а ІК – тільки такі, в яких вага кожної четвірки символів $(p_{4n-3}, p_{4n-2}, p_{4n-1}, p_{4n})$ рівна двом.

Розглянуті нижче ІПК допускають аналогічне спрощення, коли використовуються лише такі слова переставного коду, в яких кожна група із w сусідніх символів p_n , $n \in \{mw - w + 1, \dots, mw\}$, $1 \leq m \leq N_0 = N / w$, містить рівно w_i – символів i .

Для ієрархічної перестановочної кодової конструкції проведемо наступні розрахунки.

Приклад 4. Множину п'ятіркових одномірних елементарних сигналів $X = \{0, \pm p, \pm 2p\}$ розіб'ємо на $R=3$ підмножини $X^{(0)} = \{0\}$, $X^{(1)} = \{\pm p\}$, $X^{(2)} = \{\pm 2p\}$. В позначеннях (26) прийемо $w_0=w_2$, $w_2=2w_0$, $N=4N_0$ і враховуючи (31) отримаємо $p^2=2/3$, звідки в силу (29) $\delta_x = \delta_x(0,1) = \delta_x(1,2) = 2/3$, $\delta_x(0,2) = 8/3$. Троїчний переставний код $P = P[N_0, 2N_0, N_0]$ тут, очевидно, вигідно будувати за допомогою композиції двох рівноважних кодів $P_2 = P[N_0, N_0]$ із символами з $\{0, 2\}$ і $P_1 = P[2N_0, 2N_0]$ із символами з $\{1, t\}$ (заміняючи потім t на символи 0 або 2 коду P_2 (п. 5. 1. 1)), тому що відстань $\delta_x(0,2)$ учетверо більша за δ_x . Нехай $D=32/3$. Тоді Хеммінгова відстань коду P_2 повинна бути рівною $d_{P_2} = 4$. При $N_0=8$ в якості P_2 можна обрати $M_{P_2} = 870$ слів ваги 8 коду Хеммінга $[16, 11, 4]_2$ (по верхній оцінці [17] $M_{P_2} \leq 1320$). Код $P_1 = P[16, 16]$ повинен ма-

ти Хеммінгову відстань $d_{P_1} = \lceil D / \delta_x \rceil = 16$ і їм може бути рівноважний (без нульового й одиничного слів) код РМ потужності $M_{P_1} = 2(2^5 - 1) = 2 \cdot 31$. Необхідний троїчний переставний код потужності $M_P = M_{P_1} M_{P_2} = 2 \cdot 31 \cdot 870$ побудований. Початковий клас сигналів побудуємо за допомогою ІК, прийнявши в якості складеного елементарного політопа тривимірний (оскільки одна з координат дорівнює нулю) паралелограм $\tilde{X} = X^{(0)} \times X^{(1)} \times X^{(1)} \times X^{(2)}$, тобто 8 наборів $(0, p(-1)^{s_3}, p(-1)^{s_2}, p(-1)^{s_1})$, де $s_i \in \{0, 1\}$. Якщо

$$s_1 = q_{1n}, \quad s_2 = q_{1n} \oplus q_{2n}, \quad s_3 = q_{1n} \oplus q_{2n} \oplus q_{3n},$$

те з (3) отримаємо $\delta_1 = (4p^2 + 4p^2 + 16p^2) = 24p^2$,
 $\delta_2 = \min\{4p^2 + 4p^2, 16p^2\} = 8p^2$, $\delta_3 = \min\{4p^2, 4p^2, 16p^2\} = 4p^2$.

Таким чином, нам будуть потрібні коди трьох рівнів з Хеммінговими відстанями $d_i = \lceil D / \delta_i \rceil$, рівними $d_1=1$, $d_2=2$, $d_3=4$, тобто коди $[8, 8, 1]_2$, $[8, 7, 2]_2$, $[8, 4, 4]_2$, що відповідає потужності $M_A = 2^{8+7+4} = 2^{19}$. Всього побудована за допомогою ІПК система сигналів розмірності 32 має $M = M_A M_P = 2^{21} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31 = 2^{34,72}$ сигналів при $D = 16p^2 = 32 / 3$.

Коди $[8, 8, 1]_2$, $[8, 7, 2]_4$, $[8, 4, 4]_4$, $[8, 1, 8]_3$ дають систему сигналів тієї ж розмірності й з тим же $D = 16p^2 = 32 / 3$, що й ІПК прикладу 4, але із числом сигналів $M = 2^8 4^7 4^4 3 = 2^{31,585}$, тобто приблизно на три біти менше.

Приклад 5. Нехай $N_0=10$, $D=9$. Тоді коди (у порядку зростання рівнів) $[10, 10, 1]_3$, $[10, 10, 1]_3$, $[10, 9, 2]_2$, $[10, 6, 3]_2$, $[10, 6, 4]_3$, де код п'ятого рівня виходить із троїчного коду Голя, а шостий рівень не використовується (код складається з одного слова), дають початковий клас сигналів потужності $M_A = 3^{26} 2^{15} = 2^{56,21}$. Наведена вище оцінка потужності троїчного коду становить при $d_P=12$, $M_P > 2^{16,38}$ звідки $M = M_A M_P > 2^{72,6}$.

Моделювання показало, що код Ріда-Соломона п'ятого рівня $[10, 7, 4]_9$ і код $[10, 2, 6]_3$ шостого рівня разом з кодами перших чотирьох рівнів дають спрощений варіант ІПК прикладу 10а, з $M = 3^{34} \cdot 2^{17} = 2^{70,89}$, що ненабагато гірше. Код п'ятого рівня $[40, 26, 8]_9$, одержуваний укороченням коду Ріда-Соломона над ІК (81), і код $[40, 16, 2]_2$ шостого рівня разом з п'ятьма іншими кодами дають спрощений варіант ІПК прикладу 10б з потужністю $M = 3^{131} \cdot 2^{79} = 2^{286,64}$, тобто суттєво меншою.

5. 3. Порівняльний аналіз зменшення сигнальної відстані при підвищенні ефективності роботи безперервного каналу передачі інформації

Узагальнені результати оцінки ефективності зменшення сигнальної відстані при підвищенні ефективності роботи кодової конструкції багатовимірного сигналу подано в табл. 1.

В табл. 1 наведені параметри кодових конструкцій сигналів, побудованих по результатам рішень прикладів відносно визначених типів кодових конструкцій.

В першому стовпці зазначена розмірність системи сигналів. У другому – розмірність елементарного або, у вигляді суми розмірностей, складеного елементарного політопа. У третьому – мінімальна енергетична (квадрат евклідова) відстань (при одиничній середній енергії на координату). У четвертому стовпчику – швидкість R в бітах на координату. Потім подано дані швидкість R_1 найкращої четвіркової СФМ (або інший ФМ, зазначеної у виносці) з тими ж N_v й D верхні границі швидкості Шеннона $R_{\text{ш}}$ [1] і Кабатянського-Левенштейна $R_{\text{КЛ}}$ [30]. В останньому стовпці зазначений номер прикладу й тип конструкції (НК означає неоднорідну конструкцію).

Таблиця 1

Результати обрахування сигнальних відстаней кодових конструкцій багатовимірних сигналів

| N_v | ν | D | R | R_1 | $R_{\text{ш}}$ | $R_{\text{КЛ}}$ | Примітка |
|-------|---------|-------|-------|--------------------|----------------|--------------------|----------|
| 30 | 2 | 6 | 1,159 | 0,792 ¹ | 2,213 | 1,592 | 1, ІК |
| 64 | 2 | 12 | 1,096 | 0,895 | 2,240 | 1,639 | 1, ІК |
| 40 | 4 | 16 | 0,963 | 0,825 | 2,190 | 1,082 | 1, ІК |
| 6 | 2 | 6 | 1,028 | 0,792 ¹ | 1,225 | 1,065 ⁵ | 2, НК |
| 6 | 3 | 2,07 | 1,515 | 0,292 ² | 1,887 | – | 2, НК |
| 16 | 1+1 | 4 | 1,353 | 1,000 | 2,163 | 1,428 | 3, ПК |
| 24 | 1+2 | 12 | 1,024 | 0,792 | 1,664 | 1,114 ⁵ | 3, ПК |
| 32 | 1+1+1+1 | 10,67 | 1,085 | 0,969 ³ | 1,854 | 1,217 | 4, ІПК |
| 32 | 4 | 10,67 | 0,987 | 0,969 ³ | 1,854 | 1,217 | 4, ІПК |
| 60 | 2+2+2 | 9 | >1,21 | 0,983 ³ | 2,400 | 1,802 | 4, ІПК |
| 60 | 6 | 9 | 1,182 | 0,983 ³ | 2,400 | 1,802 | 5, ІПК |
| 240 | 2+2+2 | 18 | >1,42 | 0,962 ⁴ | 2,878 | 2,307 | 5, ІПК |
| 240 | 6 | 18 | 4,194 | 0,962 ⁴ | 2,878 | 2,307 | 5, ІПК |

Примітка: ¹ – ненадлишкова 3-ічна ФМ; ² – ненадлишкова 6-ічна ФМ; ³ – при $D=8$; ⁴ – при $D=16$; ⁵ – з роботи [31, 32].

6. Обговорення результатів зменшення сигнальної відстані при підвищенні ефективності роботи кодової конструкції багатовимірного сигналу

Аналіз отриманих результатів, що узагальнені в таблиці 1, показує наступне.

Виграш ІПК в порівнянні з ІК тим помітніший, чим більше розмірність. Зауважимо для порівняння, що однократній (двійковий) ФМ відповідає швидкість $R=0,5$ і $D=8$, а дворазовий (четвіркової) – $R=1,0$, $D=4$.

Це пояснюється тим, що ІПК через особливості формування та можливості щодо варіювання змінами складових кодової конструкції може забезпечити всі ненульові відстані з однаковим значенням. В першу чергу це можливість до формування правильного симплексу з двох сигналів простої ІПК. Чи набір ортогональних сигналів з однаковими нормами в більш складних по побудові ІПК. Додатковою перевагою ІПК, яка підтверджується даними табл. 1 є те, що в ній є можливість замінити всі ненульові сигнальні відстані найменшим з них.

Тобто можливість до двійкового квантування сигнальної відстані. Це дає значні переваги в швидкості передачі інформації. Що і показали данні табл. 1.

Визначимо особливості запропонованих методи формування кодових конструкцій багатовимірних сигналів. Реалізація процедур модуляції, як видно з їхнього опису в п. 5. 1, 5. 2, не зустрічає принципових труднощів навіть в загальному випадку, якщо, звичайно, для кожного коду відома прийнятна процедура кодування. Труднощі скоріше можуть виникнути у зв'язку з тим, що ІК та ІПК звичайно вимагають недвійкових кодів і навіть необов'язково кодів над ступенем простого числа. Конкретних кодів такого типу відомо не багато. Останнім часом у теорії недвійкових кодів намітився істотний прогрес. Описані нові троїчні й четвіркові коди [30–34]. Привабливий є напрямок, пов'язаний з кодами над кільцями відрахувань [35, 36]. Іноді потрібні коди вдається побудувати за допомогою ІК. Можливості переставних конструкцій обмежені також насамперед невеликим числом відомих конструкцій переставних кодів, особливо недвійкових. Очевидно, найбільш перспективна ІПК із переставним кодом у вигляді композиції рівноважних (п. 5. 3).

Таким чином, в роботі встановлено та обґрунтовано зв'язок сигнальної відстані визначених типів кодових конструкцій та швидкодії безперервного каналу передачі багатовимірної сигналу на фоні підтримання визначеного рівня завадозахищеності.

До обмежень, що притаманні вище поданим дослідженням, слід віднести наступне. Побудувати прийнятну по складності точну процедуру максимально правдоподібної демодуляції вдається лише у виняткових випадках. Найпростіша наближена процедура, що реалізує енергетичну відстань D (тобто, що приводить до правильного вирішення при енергії завади $< D/4$), може бути побудована як послідовність виконуваних у порядку зменшення рівнів процедур приймання в цілому для окремих кодів, що визначають конструкцію системи сигналів, якщо кожна з них реалізує D (аналогічно ключовому алгоритму для узагальнених каскадних кодів [23]). При цьому приймання в цілому для коду l -го рівня ІК полягає в мінімізації при відповідних обмеженнях ([4]) суми $\sum_{n=1}^N \Delta_{ln}(q_{ln})$, де $\Delta_{ln}(q_{ln}) = \min_{q_{jn}, j < l} \Delta_n(q_{1n}, \dots, q_{ln}, \hat{q}_{l+1,n}, \dots, \hat{q}_{Ln})$, $\Delta_n(q_{1n}, \dots, q_{Ln})$ – енергетична відстань (або інший міра відмінності) між n -м елементарним сигналом $x_n = f(q_{1n}, \dots, q_{Ln})$ і відповідним спостереженням z_n на виході каналу, \hat{q}_{in} – символ слова-розв'язку коду i -го рівня, $i > l$. При ІПК спочатку виконується приймання в цілому для переставного коду, який можна трактувати як код $(L+1)$ -го рівня (при композиційній конструкції коду демодуляція починається з коду P_1). При ПК після вирішення про слово переставного коду завдання зводиться до демодуляції початкового класу сигналів. Доказ реалізованості відстані D при такому найпростішому алгоритмі базується на тому, що при правильному прийманні слів попередніх рівнів величина $\sum \Delta_{ln}(q_{ln}^*)$, де q_l^* – передане слово коду l -го рівня, не перевершує енергії вектора завади.

Таким чином, для придатності описаних конструкцій по суті досить, щоб для кожного з визначальних конструкцій кодів були відомі процедури кодування й хоча б субоптимального приймання в цілому.

Певним недоліком запропонованих методів кодування, що отримали розвиток в даній статті, є те, що процедури кодування повинні розроблятися під двійкові коди. Але, в свою чергу, розвиток методів удосконалення кодових конструкцій типу ІК та ІПК передбачає застосування і недвійкових кодів. В даній роботі питання застосування таких кодів детально не розглядаються.

В якості подальших перспективних досліджень та розвитку в цьому напрямку пропонується подальші дослідження щодо застосування недвійкових кодів для формування кодових конструкцій. Також певні перспективи досліджень має питання оцінки умов субоптимальності прийому сигналу в умовах впливу адитивного гаусівського шуму та при релеєвському затуханні багатовимірного сигналу на трасі передачі.

Вказані дослідження передбачають розвиток теоретичних положень об'рахування впливу шумів та збурень при формуванні кодової конструкції багатовимірного сигналу. А на фоні обліку ще і релеївського затухання сигналу можуть виникнути труднощі щодо розвитку необхідного математичного апарату та подальшої його реалізації в програмних продуктах

7. Висновки

1. Встановлено, що кодові конструкції, що мають в основі побудови ієрархічну структуру, задають систему сигналів з мінімальними сигнальним і відстанями, які мають змогу визначатися значеннями мінімальних Хемінгових відстаней в структурі коду кодів.

До таких типів кодових конструкцій в роботі віднесено: ієрархічну кодову конструкцію сигналів; ієрархічну кодова конструкція сигналів з евклідовою метрикою; перестановочну кодову конструкції сигналів; перестановочну кодова конструкцію сигналів з евклідовою метрикою.

Варіюванням значеннями сигнальних відстаней до мінімальних, співпоставлених Хемінговим, для визначених кодових конструкцій багатовимірних сигналів можна значно підвищити обсяги та швидкість переданої інформації через безперервний канал.

2. В результаті моделювання встановлено, що в залежності від типу кодової конструкції змінами сигнальної відстані можна значно підвищити швидкість передачі інформації в бітах на координату.

Для ієрархічної кодової конструкції це може скласти до 20 відсотків при зменшенні сигнальної відстані в два рази.

Для ієрархічної перестановочної конструкції, при зменшенні сигнальної відстані на 10 і більше відсотків, приріст швидкості передачі інформації може досягати до 35 і більше відсотків.

3. Ієрархічна переставна кодова конструкція в порівняння з ієрархічної кодовою конструкцією забезпечує вииграш до двох і більше разів в швидкості передачі інформації при зменшенні сигнальної відстані в два рази.

Реалізація процедури модуляції не має принципових труднощів при умові, що для кожного коду кодової конструкції відома процедура кодування при застосування двійкових кодів.

Найпростіша наближена процедура демодуляції, що реалізує сигнальну відстань, може бути побудована, як послідовність здійснюваних у порядку зменшення рівнів процедур приймання в цілому для окремих кодів, що визначають конструкцію системи в цілому.

Подяка

Висловлюємо повагу і глибоку вдячність Дробіку Олександру Васильовичу, кандидату технічних наук, професору, директору Наукового центру Державного університету телекомунікацій за плідну співпрацю та вагомий внесок у підготовку матеріалу до цього дослідження.

Література

1. Хэмминг, Р. В. (1998). Теория кодирования и теория информации. Москва: «Радио и связь», 176.
2. Касами, Т. (1978). Теория кодирования. Москва: Мир, 576.
3. Морелос-Сарагоса, Р. (2006). Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. Москва: Техносфера, 320.
4. Полушин, П. А. (2007). Избыточность сигналов в радиосвязи. Москва: Радиотехника, 256.
5. Варбанец, С. П. (2013). Теория кодирования. Одесса: ОНУ, 43.
6. Селетков, В. Л. (2010). Общая структура линейной системы помехоустойчивого кодирования. Вісті вищих учбових закладів. Радіoeлектроніка, 53 (12), 24–31. doi: <https://doi.org/10.20535/s0021347010120034>
7. Di Renzo, M., Haas, H., Ghrayeb, A., Sugiura, S., Hanzo, L. (2014). Spatial Modulation for Generalized MIMO: Challenges, Opportunities, and Implementation. Proceedings of the IEEE, 102 (1), 56–103. doi: <https://doi.org/10.1109/jproc.2013.2287851>
8. Wong, C. W., Wong, T. F., Shea, J. M. (2011). Secret-Sharing LDPC Codes for the BPSK-Constrained Gaussian Wiretap Channel. IEEE Transactions on Information Forensics and Security, 6 (3), 551–564. doi: <https://doi.org/10.1109/tifs.2011.2139208>
9. Micheli, G., Neri, A. (2020). New Lower Bounds for Permutation Codes Using Linear Block Codes. IEEE Transactions on Information Theory, 66 (7), 4019–4025. doi: <https://doi.org/10.1109/tit.2019.2957354>
10. Chen, P., Shi, L., Fang, Y., Cai, G., Wang, L., Chen, G. (2018). A Coded DCSK Modulation System Over Rayleigh Fading Channels. IEEE Transactions on Communications, 66 (9), 3930–3942. doi: <https://doi.org/10.1109/tcomm.2018.2827032>
11. Jochym-O'Connor, T., Yoder, T. J. (2021). Four-dimensional toric code with non-Clifford transversal gates. Physical Review Research, 3 (1). doi: <https://doi.org/10.1103/physrevresearch.3.013118>

12. Freudenberger, J., Ghaboussi, F., Shavgulidze, S. (2013). New Coding Techniques for Codes over Gaussian Integers. *IEEE Transactions on Communications*, 61 (8), 3114–3124. doi: <https://doi.org/10.1109/tcomm.2013.061913.120742>
13. Park, J., Kim, I., Song, H.-Y. (2017). Interpretation of polar codes with Plotkin construction based on Gaussian approximation. 2017 Eighth International Workshop on Signal Design and Its Applications in Communications (IWSDA). doi: <https://doi.org/10.1109/iwsda.2017.8097085>
14. Gnatyuk, S., Kinzeryavyy, V., Iavich, M., Prysiaznyi, D., Yubuzova, K. (2018). High-performance reliable block encryption algorithms secured against linear and differential cryptanalytic attacks. *Proceedings of the 14th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer. Volume II: Workshop. Kyiv, 2104*, 657–668. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2104/paper_220.pdf
15. Fogel, A., Koeyer, I., Secrist, C., Sipherd, A., Hafen, T., Fricke, M. (2021). The Revised Relational Coding System. doi: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.27439.46245>
16. Батенков, К. А. (2014). Моделирование непрерывных каналов связи в форме операторов преобразования некоторых пространств. *Труды СПИИРАН*, 1 (32), 171–198. doi: <https://doi.org/10.15622/sp.32.11>
17. Boiko, J. M. (2014). Improvements Encoding Energy Benefit in Protected Telecommunication Data Transmission Channels. *Communications*, 2 (1), 7. doi: <https://doi.org/10.11648/j.com.20140201.12>
18. Boiko, J., Pyatin, I., Eromenko, O., Stepanov, M. (2020). Method of the adaptive decoding of self-orthogonal codes in telecommunication. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, 19 (3), 1287. doi: <https://doi.org/10.11591/ijeecs.v19.i3.pp1287-1296>
19. Gorcin, A. (2013). Multidimensional Signal Analysis for Wireless Communications Systems. *Graduate Theses and Dissertations*. URL: <https://digitalcommons.usf.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5877&context=etd>
20. Joo, H.-S., Kim, K.-H., No, J.-S., Shin, D.-J. (2017). New PTS Schemes for PAPR Reduction of OFDM Signals Without Side Information. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 63 (3), 562–570. doi: <https://doi.org/10.1109/tbc.2017.2711141>
21. Shamasundar, B., Chockalingam, A. (2020). Constellation Design for Media-Based Modulation Using Block Codes and Squaring Construction. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 38 (9), 2156–2167. doi: <https://doi.org/10.1109/jsac.2020.3000828>
22. Vameghestahbanati, M., Marsland, I., Gohary, R. H., Yanikomeroglu, H. (2020). Hypercube-Based Multidimensional Constellation Design for Uplink SCMA Systems. 2020 IEEE International Conference on Communications Workshops (ICC Workshops). doi: <https://doi.org/10.1109/iccworkshops49005.2020.9145403>
23. Блох, Э. Л., Зяблов, В. В. (1976). Обобщенные каскадные коды. *Москва: Связь*, 240.
24. Блейхут, Р. (1986). Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. *Москва: Мир*, 576.

25. Левина, Б. Р. (1979). Статистическая теория связи и ее практические приложения. Москва: Связь, 376.
26. Кларк, Д., Кейн, Д. (1987). Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. Москва: Радио и связь, 392.
27. Danielsen, L. E. (2012). On the Classification of Hermitian Self-Dual Additive Codes Over GF(9). *IEEE Transactions on Information Theory*, 58 (8), 5500–5511. doi: <https://doi.org/10.1109/tit.2012.2196255>
28. Норден, А. П. (2016). Элементарное введение в геометрию Лобачевского. Москва: Ленан, 220.
29. Коксетер, Г., Мозер, Дж. (1980). Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. Москва: Наука, 240.
30. Жураковський, Б. Ю. (2019). Дослідження використання нових заводських кодів для каналів зі стиранням. *Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій*, 10 (2), 93–96. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vduikt_2012_10_2_18
31. Банкет, В. Л., Прокопов, С. Д. (2000). Метод определения свободного расстояния инвариантных сигнально-кодовых конструкций. *Праці УНДІРТ*, 1 (21), 39–44. URL: <https://biblio.suitt.edu.ua/bitstream/handle/123456789/1711/Банкет%2c%20Прокопов.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
32. Polak, S. C. (2019). Semidefinite Programming Bounds for Constant-Weight Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 65 (1), 28–38. doi: <https://doi.org/10.1109/tit.2018.2854800>
33. Zhang, H., Zhang, X., Ge, G. (2012). Optimal Ternary Constant-Weight Codes With Weight 4 and Distance 5. *IEEE Transactions on Information Theory*, 58 (5), 2706–2718. doi: <https://doi.org/10.1109/tit.2011.2179412>
34. Gnatyuk, S., Kinzeryavyy, V., Kyrychenko, K., Yubuzova, K., Aleksander, M., Odarchenko, R. (2020). Secure Hash Function Constructing for Future Communication Systems and Networks. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 561–569. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-12082-5_51
35. Brumnik, R., Kovtun, V., Okhrimenko, A., Kavun, S. (2014). Techniques for Performance Improvement of Integer Multiplication in Cryptographic Applications. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 1–7. doi: <https://doi.org/10.1155/2014/863617>
36. Odarchenko, R., Gnatyuk, V., Gnatyuk, S., Abakumova, A. (2018). Security Key Indicators Assessment for Modern Cellular Networks. 2018 IEEE First International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC). doi: <https://doi.org/10.1109/saic.2018.8516889>